Lernzirkel Quadratische Gleichungen

Hohenstaufen Gymnasium Kaiserslautern

1999/2000

Klasse 10 (Klasse 9)

Helmut Hürter

Inhaltsverzeichnis:

Inhalt	Seite
Inhaltsverzeichnis	1
Voraussetzungen, Erfahrungen, Tipps, Literatur	2
Kennzeichnung der Stationen	4
Übersicht über bearbeitete Stationen	5
Auf den Arbeitsblättern verwendete Symbole	6
Regeln bei Durchführung des Lernzirkels	7
Laufzettel der Schüler	8
Geplanter Zeitplan für die Durchführung	9
Auswertung: Befragung der Schüler	10
Stationen A bis Q	11
Lösungen und Tipps	37

Lernzirkel Quadratische Gleichungen

Hohenstaufen Gymnasium Kaiserslautern

1999/2000

Klasse 10 (Klasse 9)

Voraussetzungen, Erfahrungen und Tipps:

- Stundenzahl:
  - Geplant waren 8 Stunden tatsächlich wurden 10 Stunden benötigt. Der Zeitplan ist dementsprechend modifiziert. Vorzuziehen ist ein Ansatz von mindestens 12 Stunden mit ca. zwei lehrerzentrierten Einschüben.
  - Der Vergleich mit dem Lehrplan (30 Stunden für quadratische Gleichungen und quadratische Funktionen) zeigt, dass dies nicht mehr Zeit war, als man beim herkömmlichen Unterricht braucht.
- Durchführung: Durchgängig vor Beginn der Herbstferien (September 1999).
- Voraussetzungen bei den Schülern:
  - Die Schüler waren eigenständiges Arbeiten aus Einzelstunden gewöhnt.
  - Die Schüler hatten schon mit DERIVE gearbeitet.
  - Einige Schüler waren auch in der Internet-AG.
- Organisatorische Rahmenbedingungen:
  - Der Lernzirkel verbrauchte ca. 30 mal 25 Kopien,
  - der Saal war zum Auslegen der Arbeitsblätter ausreichend groß.
  - Die Arbeitsblätter konnten während der ganzen Zeit im Saal liegen bleiben.
  - Bei fast allen Stunden stand außer dem Klassensaal auch das Computerlabor zur Verfügung.

- Ordnung und Überblick:
  - Die Regeln (Anhang) wurden nicht erarbeitet, sondern vom Lehrer vorgegeben.
  - Das Material war für alle Schüler sichtbar.
  - Im Saal war eine Korkwand, an der ein Übersichtsbogen und Musterlösungen ausgehängt werden konnten.
  - Die Schüler hatten einen Laufzettel, auf dem sie bearbeitete Stationen abhaken lassen sollten.
- Lernzielkontrolle
  - Unmittelbar im Anschluss an den Lernzirkel wurde eine Klassenarbeit geschrieben.
  - Das Ergebnis der Klassenarbeit war nicht besser und nicht schlechter als normal.
- Organisation
  - Für das Erläutern des Lernzirkel wurde nur wenig Zeit (ca. 15 Minuten) veranschlagt.
  - Im Anschluss wurde eine schriftliche Evaluation durchgeführt. Diese wurde nach Auszählung mit den Schülern besprochen.
- Literatur

  - Michael Martin: Materialien für den Mathematikunterricht in der Orientierungsstufe, in: PZ-Information 15/98, Pädagogisches Zentrum Rheinland-Pfalz, Bad Kreuznach 1998.
  - August Schmid: Lambacher Schweizer NEUN, Ausgabe für Rheinland-Pfalz, Klett, Stuttgart 1992.
  - Hans J. Schmidt: Prof. Nosenix´ Trickkiste, Historische Verfahren - Zeitgemäß aufbereitet, Aulis, Köln 1998.
  - Peter Bardy: Modellbidlungen zum Kugelstoßen, in: Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Band 3, Verlag franzbecker, Bad Salzdetfurth 1996.
  - Beutelspacher A., Petri P., Der goldene Schnitt, BI-Verlag, Zürich 1989.

Kennzeichnung der Stationen:

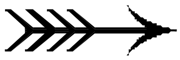
Station

A

Übersicht über bearbeitete Stationen

Station		A					B	C				D	E			F		G	H	I					J					KQ	KQ
f/p/w		p	p	f	f	f	f	p	p	p	p	f	p	p	p	p	p	p	f	p	p	p	p	f	w	w	w	w	w	w	w
(freiw./Pflicht/Wahl)		a	b	c	d	e		1a	1b	2a	2b		S1	S2	S3	a	b			a	b	c	d	e	a	b	c	d	e		
Name	Vorname																														

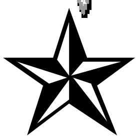
Symbole

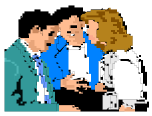
Achtung Aufgabe 

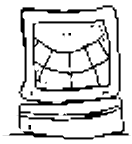
Pflichtaufgabe 

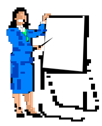
einfache Aufgabe 

schwere Aufgabe 

gute Note möglich 

Gruppenarbeit empfohlen 

Computereinsatz 

Präsentation 

Lernzirkel
Quadratische Gleichungen

Der Lernzirkel zum Thema quadratische Gleichungen bietet dir die Möglichkeit, eine Unterrichtseinheit **selbstständig** bzw. mit anderen Schülern gemeinsam zu erarbeiten.

Du hast **Freiheiten**:

- Du kannst zum Teil die Reihenfolge der Bearbeitung selbst wählen.
- Du kannst zum Teil die Inhalte selbst wählen.
- Du kannst dir die Bearbeitungszeiten für Aufgaben einteilen.
- Du kannst zwischen Einzel-, Partner- und Gruppenarbeit wählen.
- Du kannst dir die Hausaufgaben zum Teil selbst stellen.
- Du kannst die Arbeit an deinem normalen Tisch oder bei Gruppenmitgliedern oder im Computerlabor 301 verrichten.

und **Pflichten**:

- Die meisten Stationen sind Pflichtstationen, die bearbeitet werden **müssen**.
- Viele Aufgaben erfordern eine Selbstkontrolle, die du vornehmen musst.
- Du bist mitverantwortlich für das Arbeitsklima (Einstellung zum Arbeiten und Arbeitsdisziplin).
- Die Verantwortung, selbst für deinen Lernerfolg zu sorgen, nimmt gegenüber dem sonstigen Unterricht zu.
- Je nach Station bist du wegen der erforderlichen Präsentationen auch für den Lernerfolg der Mitschüler mitverantwortlich. Dies erfordert besonders sorgfältige Durchführung dieser Arbeiten.
- Du musst dafür sorgen, dass dein Laufzettel und der Übersichtsbogen immer auf dem neuesten Stand ist. Auf dem Laufzettel werden von dir bearbeitete Stationen vom Lehrer abgezeichnet, die du dann auf dem Übersichtsbogen als bearbeitet kennzeichnen kannst.

Weitere wichtige **Informationen**:

- Am Ende der Unterrichtseinheit wird eine Klassenarbeit zum Thema quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen durchgeführt.
- Bei Schwierigkeiten solltest du Biss zeigen, wenn das nichts nützt, kannst du Mitschüler, das Computerprogramm DERIVE, das Lösungsbuch oder zuletzt den Lehrer um Hilfe bitten.
- Die Dokumentation deiner Arbeit erfolgt wie gewöhnlich auf kariertem Papier mit Rand und wird ebenso wie weiteres Material (Arbeitsblätter, kopierte Lösungen usw.) im Ordner abgelegt. Beim Abzeichnen einer Station wird der Ordner kurz gezeigt.

Quadratische Gleichungen

Übersicht über die Stationen und Laufzettel von:

Station A: Eine Anwendung, die auf eine quadratische Gleichung führt: Kugelstoßen

a) Pflicht
b) Pflicht
c) Freiwillig
d) Freiwillig
e) Freiwillig

Station B: Kugelstoßen: Internetrecherche

Freiwillig

Station C: Zeichnerische Lösung

1a) Pflicht
1b) Pflicht
2a) Pflicht
2b) Pflicht

Station D: Rechnerische Lösung: Puzzle

Freiwillig

Station E: Rechnerische Lösung:

a) Spalte 1 Pflicht
b) Spalte 2 Pflicht
c) Spalte 3 Pflicht

Station F: Rechnerische Lösung: Lösungsformel

a) (Lösungsformel): Pflicht
b) (Aufgaben): Pflicht

Station G: Vieta’s Trick

Nosenix: Pflicht

Station H: Vieta’s Trick: Beweis

(Formel): Freiwillig

Station I : Satz von Vieta: Übungen

a) Pflicht
b) Pflicht
c) Pflicht
d) Pflicht
e) Freiwillig

Station J : Gleichungen für Fortgeschrittene: Eine nach Wahl

a) Wahl
b) Wahl
c) Wahl
d) Wahl
e) Wahl

Zuletzt löst jeder Schüler zwei der Stationen K bis Q.

Station K bis Q die erste:
Station K bis Q die zweite:

Quadratische Gleichungen

Zeitplan für die Durchführung :

Station A: Eine Anwendung, die auf eine quadratische Gleichung führt: Kugelstoßen	erste Stunde
Station B: Kugelstoßen: Internetrecherche	zweite Stunde
Station C: Zeichnerische Lösung	zweite Stunde
Station D: Rechnerische Lösung: Puzzle	dritte Stunde
Station E: Rechnerische Lösung:	vierte Stunde
Station F: Rechnerische Lösung: Lösungsformel	vierte Stunde
Station G: Vieta's Trick	fünfte Stunde
Station H: Vieta's Trick: Beweis	sechste Stunde
Station I: Satz von Vieta: Übungen	sechste Stunde
Station J: Gleichungen für Fortgeschrittene	siebte Stunde
Zuletzt löst jeder Schüler zwei der Stationen K bis Q.	achte und neunte Stunde
Präsentationen, Übungen, Sonstiges	zehnte Stunde

Auswertung des Lernzirkels

Gefallen hat:		Nicht gefallen hat:	
Eigenarbeit der Schüler, Selbstständigkeit	IIIIIIIIIIIIII	Nichts	II
Gruppenarbeit/Partnerarbeit	IIIIIIIIII	Arbeit direkt im Anschluss, Mehr vor Arbeit wiederholen	IIII
Eigene Hausaufgaben, keine Hausaufgaben	IIIIII	Einzeln zum Lehrer gehen	II
Computer	IIIIIIIII	Jeder hat was anderes gemacht	III
Mühe des Lehrers	I	Anfangsprobleme	I
Mehr Motivation der Schüler	I	Etwas langwierig	III
Individuelles Tempo, Zeiteinteilung	IIIIIIIIIII	Kontrolle der Aufgaben, Nur ein Lösungsbuch	IIII
Abwechslung	I	Zu viele Stationen	IIIIII
Nichts		Nicht alle Stationen konnten bearbeitet werden	I
Lockere Atmosphäre	IIII	Schwere Textaufgaben	I
Hilfen durch Schüler, Klimaverbesserung	I	Kerstin hilft zu wenig	II
Reihenfolge wählbar	II	Geringer Lerneffekt, zu wenig Übung	III
Symbole	I	Komische Zeichen	II
Freiwillig- Pflicht -Aufteilung	I	Wenig Präsentationen	I

Anregungen:

Mal eine Wiederholungsstunde einschieben.	Formeln vom Lehrer erklären lassen.
Vor der Arbeit wiederholen.	Noch mal Lernzirkel.
Zeitplan angeben.	Weniger Stationen.
Wichtige Stationen wiederholen.	Lernzirkel als Hausaufgabe.
Ganze Klasse soll sich gemeinsam fit machen.	Alltagsaufgaben.
Mehr PC.	

Station A
Blatt 1
Kugelstoßen

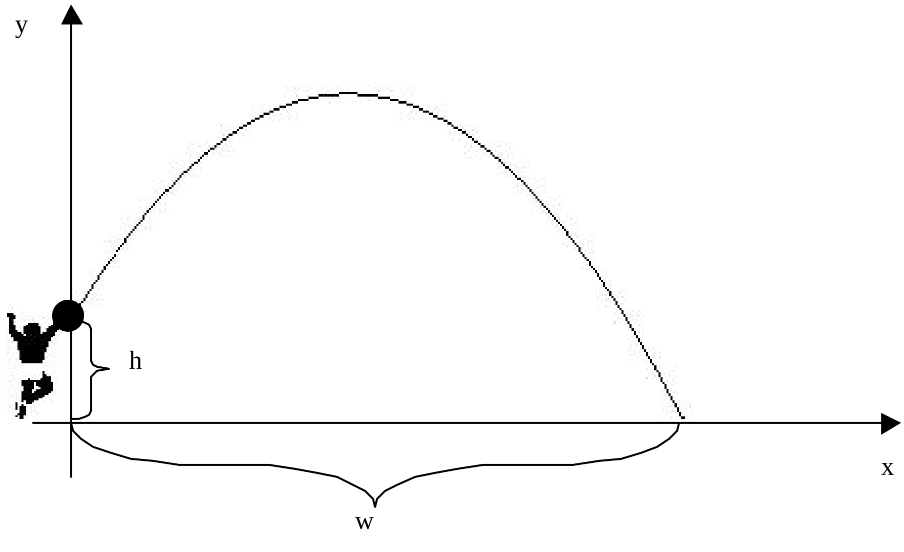
Beim Kugelstoßen hängt die Wurfweite der Kugel im wesentlichen von

a) der Abstoßgeschwindigkeit v
b) der Abstoßhöhe h
c) dem Abstoßwinkel ab.

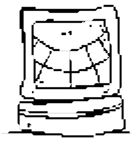
Ein relativ günstiger Abstoßwinkel ist $45°$.
Man kann nun unter Verwendung von ein wenig Physik zeigen, dass für die Flugkurve der Kugel unter diesen Voraussetzungen die folgende Gleichung gilt:

$$\boxed{y = h + x - \frac{10}{v^2} \cdot x^2}$$

Dabei wird die Höhe h in m gemessen, die Geschwindigkeit v in m/s.
x und y sind die Koordinaten der Kugel in einem Koordinatensystem, dessen Ursprung so gewählt ist, dass die Kugel im Punkt (0;h) losgelassen wird (wie in der folgenden Abbildung):



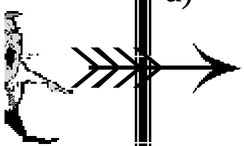
Station A
Blatt 2
Kugelstoßen



Die folgende Tabelle zeigt einige ausgewertete Stöße von der Olympiade 1972 in München, die damals mit Hilfe einer Videokamera ausgewertet wurden:

Name	Nation	Abstoß-geschwin-digkeit v (in m/s)	Abstoß-höhe h (in m)	Abstoß-winkel α (in °)	gemessene Stoßweite w (in m)	theore-tische Stoßweite (in m)	Fehler (in %)
Woods	USA	13,9	2,15	40,0	21,17		
Feuerbach	USA	13,5	2,05	38,3	21,01		
Brieseneck	DDR	13,4	2,22	39,0	20,61		
Simola	FIN	13,3	2,04	34,3	18,91		

Du sollst nun die folgenden **Fragen** mit Hilfe von DERIVE **beantworten**:



a) Sind die gemessenen Stoßweiten in Übereinstimmung mit der Formel? Gib Gründe dafür an, wieso gemessener und theoretischer Wert nicht übereinstimmen. Wie groß ist der Fehler (in %)? Fülle die beiden letzten Spalten der Tabelle aus.

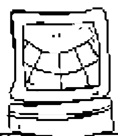
b) Wie hoch war die Kugel von Woods im höchsten Punkt der Flugkurve?

c) Wie weit hätte Simola gestoßen, wenn er 10% größer wäre?

d) Wie weit hätte Simola gestoßen, wenn er seine Abstoßgeschwindigkeit um 10% verbessert hätte?

e) Stelle selbst eine sinnvolle Frage und versuche sie zu beantworten.

Hinweise zur Station:

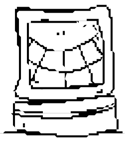


- Diese Station löst man am besten mit Hilfe eines Partners.

- Die erste Frage führt auf eine sogenannte „quadratische Gleichung“. Löse diese Gleichung mit Hilfe von DERIVE (zeichnerisch). DERIVE kann die Lösung übrigens auch rechnerisch ermitteln. Hierzu muss man bei LÖSEN ALGEBRISCH den richtigen y-Wert eingeben und danach das Ergebnis noch APPROXIMIEREN. siehe im Internet unter http://schulen.kaiserslautern.de/hsg/faecher/m/derive/derive.htm

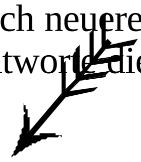
- Die Computerlösungen werden unter einer Datei Kugelname.mth im Verzeichnis Mathe10b abgespeichert.

- Die Antworten zu den Fragen trägst du unter der Überschrift Station 1,..., Frage a,... in dein Heft ein. Falls möglich, werden wir eure DERIVE-Schaubilder ausdrucken lassen, so dass diese eingeklebt werden können.



Station B
Kugelstoßen
Internetrecherche

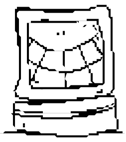
Auf der Homepage des DLV (Deutschen Leichtathletikverbandes) habe ich nach neueren Informationen zum Thema Kugelstoßen gesucht. Versuche dies auch und beantworte die folgenden Fragen:



Welche Weite stieß Oliver-Sven Buder bei der Weltmeisterschaft 1999 in Sevilla und welchen Platz belegte er damit?
Um wieviel Prozent übertraf er mit seiner Weite die Weite des zweitbesten deutschen Stoßers des Jahres 1999?
Ermittle Namen, Weite und Datum des amtierenden Weltrekordlers.
Der Weltrekord ist relativ lange nicht mehr verbessert (ebenso wie der deutsche Rekord bei den Frauen). Vielleicht liegt es an verbesserten Dopingkontrollen. Lies im Überblick des Anti-Doping Handbuchs nach, welche Strafen deutschen Dopingsünder drohen. Interessant sind auch die Bestimmungen über Urinkontrollen.
Ermittle Namen, Weite und Datum für den aktuellen deutschen Rekord bei den Frauen.
Was erscheint dir noch interessant?

Hinweise zur Station:

- Diese Station löst man mit einem Partner in Raum 301.
- Die Recherche soll eine Dauer von 15 Minuten nicht überschreiten.



Station C
Zeichnerische Lösung
Blatt 1

An dieser Station sollst du lernen, wie man eine quadratische Gleichung zeichnerisch löst. Zunächst betrachten wir ein Beispiel:

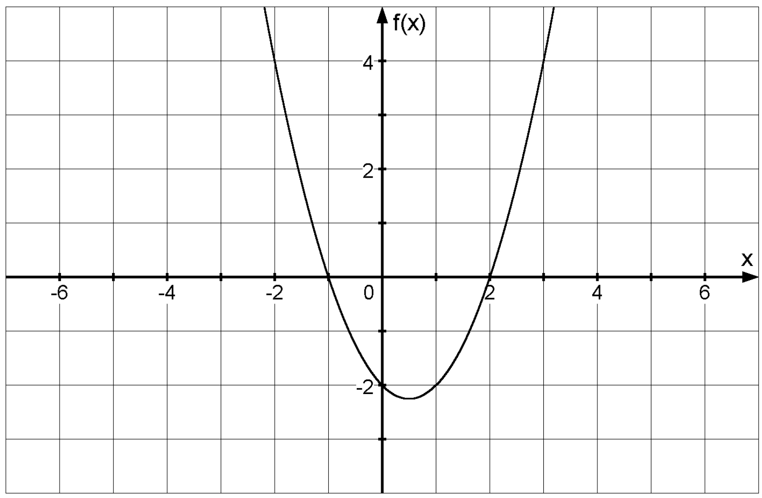
$$\boxed{2x^2 - 2x - 4 = 0}$$

In einem ersten Schritt teilen wir die Gleichung durch den Vorfaktor von x^2 (also durch 2):
$x^2 - x - 2 = 0$

Nun gibt es wesentliche zwei Lösungsalternativen:

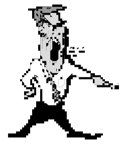
1) Man betrachtet die quadratische Funktion $x \to x^2 - x - 2$ und ermittelt zeichnerisch, für welche x-Werte diese den y-Wert 0 annimmt.

2)



Aus dem Schaubild kann man die Lösungen ablesen:

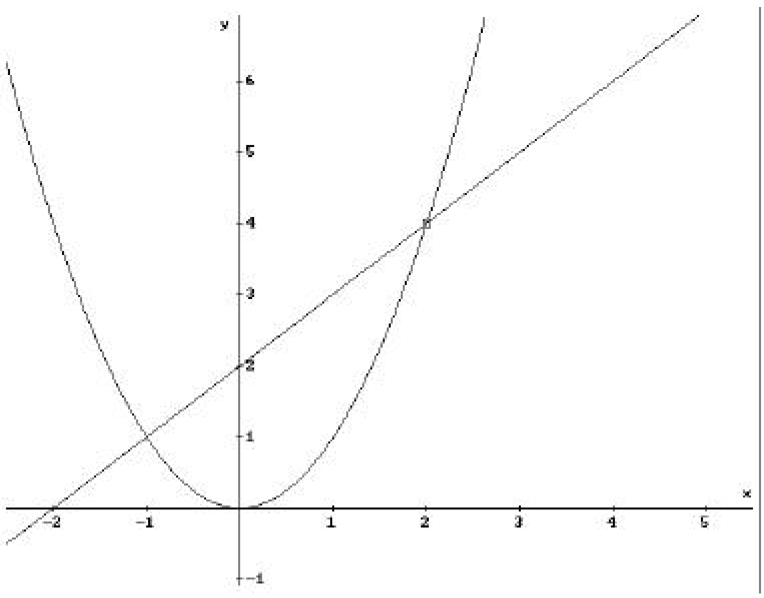
Station C
Zeichnerische Lösung
Blatt 2



3) Man bringt den quadratischen Term auf die eine Seite und den Rest auf die andere:
$x^2 - x - 2 = 0$

$$x^2 = x + 2$$

Nun betrachtet man die zu den beiden Termen der letzten Gleichung gehörigen Funktionen:
$f : x \rightarrow x^2$ und
$g : x \rightarrow x + 2$.
Danach zeichnet man deren Schaubilder und sucht diejenigen x-Werte, für die dir Funktionen den gleichen y-Wert annehmen.



Man kann die gesuchten x-Werte leicht ablesen, es gilt hier f(x)=g(x), also $x^2 = x + 2$.

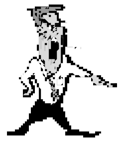
Zu diesem Thema löst du die Aufgaben von Station C Blatt 3:

Station C
Zeichnerische Lösung
Blatt 3

Die Aufgaben zu Blatt 2:

1) Bringe die Gleichung zunächst auf die Form $x^2 + bx + c = 0$. Löse dann zeichnerisch, indem du nur die „dazugehörige“ Parabel zeichnest:

a) $2x^2 + 3x - 2 = 0$
b) $0{,}5x^2 + 0{,}3x + 1 = 0$



2) Bringe die Gleichung zunächst auf die Form $x^2 = bx + c$. Löse dann zeichnerisch, indem du die linke Seite als Normalparabel und die rechte als Gerade interpretierst:

a) $1{,}5x^2 - 3x - 0{,}8 = 0$
b) $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{9}{2} = 0$.

Hinweise zur Station:

- Diese Station löst man am besten einzeln oder mit Hilfe eines Partners. Ungefähr die Hälfte der Station wird als Hausaufgabe gemacht.
- Diese Station soll ohne Computer gelöst werden, um ein Gefühl für den Unterrichtsinhalt zu entwickeln.
- Lösungen sollen im Lösungsbuch verglichen werden. Danach wird abgehakt.

Station D
Rechnerische Lösung
Puzzle

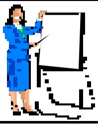
Hinweise zur Station:

- Das Puzzle löst man am besten zu zweit oder allein.
- Versuche, die Ausschnitte in die richtige Reihenfolge zu bringen. Lege sie dabei auf ein Heft.
- Lege auf das fertige Puzzle ein zweites Heft, so dass ein Sandwich entsteht, in dessen Mitte sich das Puzzle befindet.
- Drehe das Sandwich. Wenn du danach die Rückseite des Puzzles betrachtest, müsste ein Muster erkennbar sein.
- Oder: Klebe das fertige Puzzle mit Tesa am Rand fest und drehe es dann.

Gegeben ist eine quadratische Gleichung $\frac{1}{2}x^2 - 6 = -\frac{1}{2}x$.

- Bringe die Gleichung auf die Form $x^2 + px + q = 0$.
- $x^2 + x - 12 = 0$.
- Bringe den Summanden, der kein x enthält, auf die andere Seite.
- $x^2 + x = 12$.
- Suche die quadratische Ergänzung.
- $\frac{1}{4}$.
- Addiere diese quadratische Ergänzung auf beiden Seiten.
- $x^2 + x + \frac{1}{4} = 12 + \frac{1}{4}$.
- Schreibe die eine Seite mit Hilfe der ersten oder zweiten binomischen Formel als Quadrat.
- $(x + \frac{1}{2})^2 = 12 + \frac{1}{4}$.
- Vereinfache die andere Seite.
- $(x + \frac{1}{2})^2 = \frac{49}{4}$.
- Ziehe die Wurzel, beachte dabei, dass es zwei Möglichkeiten geben kann.
- $x + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ oder $x + \frac{1}{2} = -\frac{7}{2}$.
- Vereinfache das Ergebnis, falls möglich.
- $x = 3$ oder $x = -4$.
- Schreibe die Lösungsmenge auf.

$L = \{3; -4\}$.



Station E
Rechnerische Lösung

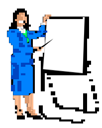
An dieser Station das rechnerische Lösen einer quadratischen Gleichung erlernt werden.

Löse **sechs von den folgenden Aufgaben, aus jeder Spalte zwei.** Musterlösungen zu diesen Aufgaben findest du im Schulbuch.
An eine Lösung mit der Lösungsformel ist zunächst nicht gedacht.
Verwende das Verfahren von Station D.

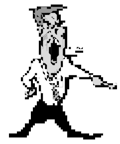
Spalte 1	Spalte 2	Spalte 3
$-3x^2+48=0$	$y^2-8y+20=4$	$x^2=4x-3$
$-4z^2=-484$	$2z^2-11z-6=0$	$\frac{1}{5}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{1}{5}=0$
$x^2-47=2$	$x^2+6x+5=0$	$0{,}2y^2-0{,}1y+0{,}012=0$
$(y-7)\cdot(y+7)=0$	$x^2+8x-9=0$	$u^2-9+(2u+1)^2=25$

Hinweise zur Station:

- Diese Station wird in Partnerarbeit gelöst.
- Jede Zweiergruppe löst sechs Aufgaben, aus jeder Spalte zwei
- Aus jeder Spalte wird eine Aufgabe später mit Hilfe einer Folie nach den bekannten Regeln **präsentiert**. Der Lehrer informiert die Schüler darüber, welche Gruppe welche Aufgabe vorführt.
- Wer nicht selbstständig oder mit Hilfe des Schulbuches weiterkommt, findet zu jeder Aufgabe einen Lösungshinweis auf dem Tippblatt.
- Lösungen können auf dem Lösungsblatt verglichen werden.



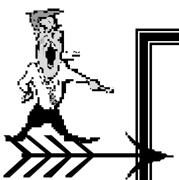
Station F
Rechnerische Lösung
Lösungsformel
Blatt 1



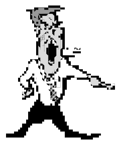
a) **Löse** die quadratische Gleichung $\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$ in folgenden Schritten:

1) Dividiere durch a.
2) Bringe den Summanden, der kein x enthält, auf die andere Seite.
3) Suche die quadratische Ergänzung zum Ausdruck $x^2 + \frac{b}{a} \cdot x$.
4) Addiere diese quadratische Ergänzung auf beiden Seiten.
5) Schreibe die eine Seite mit Hilfe der ersten oder zweiten binomischen Formel als Quadrat.
6) Vereinfache die andere Seite.
7) Ziehe die Wurzel, beachte dabei, dass es zwei Möglichkeiten geben kann.
8) Vereinfache das Ergebnis, falls möglich.
9) Vergleiche dein Ergebnis mit der Formel aus dem Buch und trage es dann hier ein.

Ergebnis:



Station F
Rechnerische Lösung
Lösungsformel
Blatt 2



b) **Löse die folgenden Aufgaben** mit der Lösungsformel:

1) $2x^2 - 5x - 42 = 0$

2) $y^2 - y - 56 = 0$

3) $3z^2 - 11z + 10 = 0$

4) $1 - x = 30x^2$

5) $11x = 3 + 30x^2$

6) $2w^2 = 0{,}18 - 1{,}6w$

7) $(s+3)\cdot(s-7)+(s+2)\cdot(2s-3)=(1{,}4s+4)\cdot(1{,}4s-4)$

Hinweise zur Station:

- Diese Station löst man am besten einzeln oder mit Hilfe eines Partners. Ungefähr die Hälfte der Station wird als Hausaufgabe gemacht.

- Die Lösungen der Aufgaben können mit dem Lösungsblatt verglichen werden.

Station G
Vieta’s Trick
Blatt 1

Der französische Mathematiker Vieta hat eine interessante Entdeckung gemacht:

Wenn man die Lösungen einer quadratischen Gleichung der Form $x^2 + bx + c = 0$

- addiert, erhält man –b,
- multipliziert, erhält man c.

Beispiel:

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

Lösung mit Hilfe quadratischer Ergänzung:

$$
\begin{aligned}
x^2 - 7x + 12 &= 0 \\
x^2 - 7x &= -12 \\
x^2 - 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 &= -12 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 \\
(x - 3{,}5)^2 &= 0{,}25 \\
x - 3{,}5 = 0{,}5 \text{ oder } x - 3{,}5 &= -0{,}5 \\
x = 4 \text{ oder } x &= 3
\end{aligned}
$$

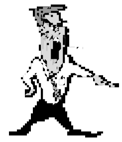
Test:

$$\boxed{\begin{aligned} 4 + 3 = 7 &= -b \\ 4 \cdot 3 = 12 &= c \end{aligned}}$$

Hinweise zur Station:

- **Lies den Text von Prof. Nosenix‘ Trickkiste auf Blatt 2. Löse danach die Aufgaben**.
- Diese Station löst man am besten einzeln oder mit Hilfe eines Partners. Ungefähr die Hälfte der Station wird als Hausaufgabe gemacht.
- Die Lösungen der Aufgaben können auf dem Lösungsblatt verglichen werden.

Station G
Vieta's Trick
Blatt 2



104  **Prof. Nosenix' Trickkiste**

Historische Verfahren - zeitgemäß aufbereitet

Wie Vieta quadratische Gleichungen löste

Der französische Mathematiker Viète (1540 - 1603), der auch Vieta genannt wurde, führte als erster den Begriff des Buchstabenkoeffizienten ein. Damit ist er der »Hauptschuldige« für das Rechnen mit Buchstaben zur Bezeichnung vorhandener oder gesuchter Zahlen. Vieta war aber nicht nur Mathematiker, sondern auch Rechtsberater zweier französischer Könige.

Wenn er quadratische Gleichungen löste, dann probierte er zunächst einmal etwas aus. Aber was? Nimm einmal

$$x^2 + 10x + 16 = 0$$

Er suchte nach zwei Zahlen x_1 und x_2, die miteinander multipliziert 16 ergaben, wenn er sie jedoch addierte, musste die Summe - 10 ergeben.
Zunächst versuchte er es mit - 1 und - 16. Weil aber (- 1) + (- 16) nicht - 10 ergab, nahm er als nächstes - 2 und - 8. Und siehe da, es klappte :
$(-2)\cdot(-8) = +16$ und $(-2) + (-8) = -10$.
Warum das so ist?
Man kann aus

$$x^2 + 10x + 16 = 0$$

$(x + 2)\cdot(x + 8)$ machen und diesem Produkt sieht man die Lösung sofort an.
Ein Produkt ist nämlich Null, wenn einer der Faktoren Null ist.
$(x + 2)$ ist der 1. Faktor und er wird Null, wenn $x = -2$ wird,
$(x + 8)$ ist der 2. Faktor und er wird Null, wenn $x = -8$ wird.

Jetzt bist du an der Reihe. Bestimme einmal wie Vieta die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen:

$x^2 + 7x + 12 = 0$	$(x \quad)\cdot(x \quad) = 0$	$x_1 =$	$x_2 =$
$x^2 - 5x - 24 = 0$	$(x \quad)\cdot(x \quad) = 0$	$x_1 =$	$x_2 =$
$x^2 - 2x - 35 = 0$	$(x \quad)\cdot(x \quad) = 0$	$x_1 =$	$x_2 =$
$x^2 - 7x + 10 = 0$	$(x \quad)\cdot(x \quad) = 0$	$x_1 =$	$x_2 =$
$x^2 - 21x + 20 = 0$	$(x \quad)\cdot(x \quad) = 0$	$x_1 =$	$x_2 =$
$x^2 + 2x - 80 = 0$	$(x \quad)\cdot(x \quad) = 0$	$x_1 =$	$x_2 =$
$x^2 + 4x + 3 = 0$	$(x \quad)\cdot(x \quad) = 0$	$x_1 =$	$x_2 =$
$x^2 - 22x + 72 = 0$	$(x \quad)\cdot(x \quad) = 0$	$x_1 =$	$x_2 =$
$x^2 - 6x - 27 = 0$	$(x \quad)\cdot(x \quad) = 0$	$x_1 =$	$x_2 =$
$x^2 + 11x + 30 = 0$	$(x \quad)\cdot(x \quad) = 0$	$x_1 =$	$x_2 =$
$x^2 - x - 12 = 0$	$(x \quad)\cdot(x \quad) = 0$	$x_1 =$	$x_2 =$

Station H
Vieta’s Trick
Beweis

In dieser Station solle der Beweis für das Funktionieren von Vietas Trick geführt werden.

Gegeben ist die Gleichung $x^2 + bx + c = 0$ (a=1)

und die beiden Lösungen

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Zeige, dass gilt:

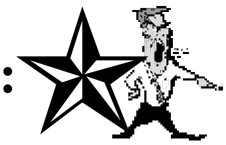
$$x_1 + x_2 = -b$$

$$x_1 \cdot x_2 = c$$

Hinweise zur Station:

- Diese Station ist freiwillig.
- Wenn du die Aufgabe gut löst und erläuterst, kannst du sie abgeben und eine sehr gute Note dafür erhalten.
- Hinweise zur Lösung der Aufgabe findest du auch im Buch.

Station I
Satz von Vieta:
Übungen
Blatt 1



Übungsaufgaben zum Satz von Vieta:

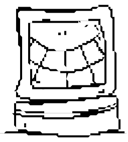
Man kann mit Hilfe des Satzes von Vieta

a) Aus gegebenen Lösungen eine dazugehörige quadratische Gleichung erzeugen:
   i) Gegeben $x_1 = 2;\ x_2 = 5$, gesucht die quadratische Gleichung.
   ii) Gegeben $x_1 = 3 + \sqrt{5};\ x_2 = 3 - \sqrt{5}$, gesucht die quadratische Gleichung.

b) Lösungen einer quadratischen Gleichung raten und dann die Probe machen:
   i) $x^2 + 7x + 12; L = \{3;4\}$
   ii) $x^2 - 8x + 16; L = \{4\}$

c) Einen quadratischen Term in Linearfaktoren zerlegen:
   i) $x^2 + 2x - 15$
   ii) $x^2 - 5x - 14$

d) Die Nullstellen einer quadratischen Funktion bestimmen:
   Bestimme die Nullstellen der Funktionen $f: x \to x^2 - 3x - 10$ und $f: x \to x^2 + 7x - 18$



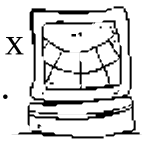
Station I
Satz von Vieta: Übungen
Blatt 2

e) Auch DERIVE kennt den Satz von Vieta: Lass dir die folgenden quadratischen Terme (falls möglich) in Linearfaktoren zerlegen:

i) $x^2 - 6x + 8$
ii) $x^2 + 2x - 15$
iii) $x^2 - 3x + 4$
iv) $x^2 + 6x + 7$
v) $x^2 + 5x + 7$
vi) $x^2 - 1{,}5x - 7$

Gehe dabei folgendermaßen vor:

(1) Gib den Term als Funktion mit y= ... ein.
(2) Lass dir den Term mit VEREINFACHEN FAKTORISIEREN x FAKTORISIEREN faktorisieren (wer das versteht ist echt gut).
(3) Lass dir die Funktion auf bekannte Art zeichnen.
(4) Lies die Nullstellen ab.



Hinweise zur Station:

- Diese Station löst man am besten einzeln oder mit Hilfe eines Partners. Ungefähr die Hälfte der Station wird als Hausaufgabe gemacht.

- Die Lösungen der Aufgaben können im Lösungsbuch verglichen werden.

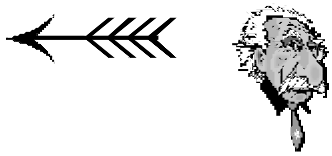
- Die DERIVE-Aufgabe wird im Verzeichnis der Klasse unter eurem Namen abgespeichert.

Station J
Gleichungen für Fortgeschrittene

Manchmal führen andere Gleichungstypen auch auf quadratische Gleichungen:

Zum Beispiel kann beim Lösen einer Bruchgleichung nach Entfernen der Nenner oder bei einer Wurzelgleichung nach Entfernen der Wurzeln oder bei biquadratischen Gleichungen oder bei nichtlinearen Gleichungssystemen eine quadratische Gleichung entstehen.

Suche dir eine der folgenden Aufgaben aus:



a) Aufgabe1: $\frac{3x^2+25}{x^2-25}+\frac{5-x}{5+x}=\frac{2x}{x-5}$

b) Aufgabe 2: $\sqrt{13-4x}=2-x$

c) Aufgabe 3: $x^4-29x^2+100=0$

d) Aufgabe 4: $x^2+2bx-3b^2=0$

e) Aufgabe 5: $\begin{aligned} 2y-4x^2&=0\\ x-y&=-4 \end{aligned}$

Hinweise zur Station:

- Diese Station ist freiwillig.
- Die Station kann auch in Dreiergruppen bearbeitet werden.
- Wenn du die Aufgabe gut löst und erläuterst, kannst du sie mit Hilfe einer Folie präsentieren und damit eine sehr gute Note erhalten.
- Hinweise zur Lösung der Aufgabe findest du auch im Schulbuch und bei den Lösungen.
- Bei der Präsentation muss auch das verwendete Verfahren hingewiesen werden, hierzu findest im Schulbuch Strukturierungsvorschläge.

Station K
Die Brunnenaufgabe

Um die Tiefe eines Brunnen zu bestimmen, kann man wie folgt vorgehen:

Man bewaffnet sich mit einem Gegenstand, den der Luftwiderstand wenig beeinflußt und einer Stoppuhr.
Nun läßt man den Gegenstand fallen und misst die Zeit vom Zeitpunkt des Fallenlassens bis zum Zeitpunkt, an dem man das Aufprallgeräusch hört.

Wenn x die Zeit (in Sekunden) bezeichnet, beschreibt bekanntlich (Galileo Galilei) $5x^2$ die Fallstrecke (in Metern). Der Schall legt in der Sekunde ca. 340 Meter zurück.

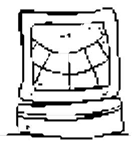
Bei der Burg Berwartstein läßt man Wasser in den Burgbrunnen fallen und kann dann langsam bis 5 zählen, ehe man das Aufprallgeräusch des Wassers hört. Das heißt, dass ca. 5 Sekunden verstreichen.
Wie tief ist der Brunnen?

Informationen über Burg Berwartstein findet man im intranet oder unter http://schulen.kaiserslautern.de/hsg/faecher/m/sinus/brunnen.htm

Informiere dich im Internet über Galileo Galilei (http://www.ham.nw.schule.de/galilei/info/galilei/galeben.htm) und schreibe dir die wichtigsten Daten heraus:

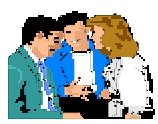
Wann und wo wurde Galileo Galilei geboren?

Wann und warum wurde ihm der Prozess gemacht?



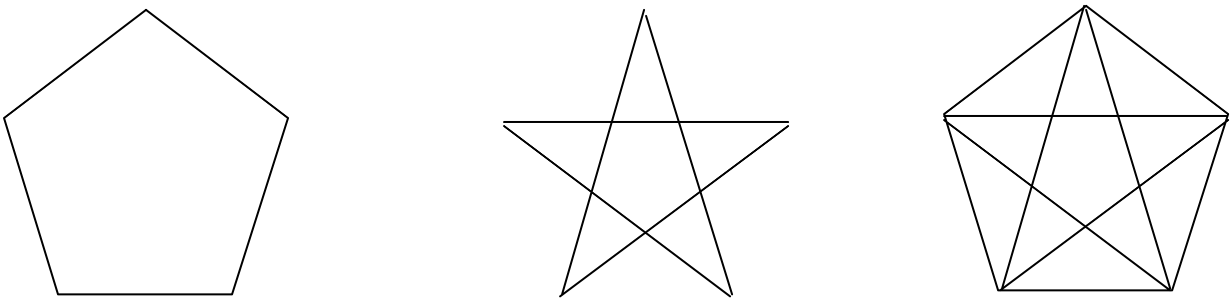
Hinweise zur Station:

- Zwei der Anwendungsaufgaben müssen gelöst werden.
- Die Station kann auch in Dreiergruppen bearbeitet werden.



- Wenn du die Aufgabe gut löst und erläuterst, kannst du sie mit Hilfe einer Folie präsentieren und damit eine **sehr gute Note** erhalten.

Station L
Der goldene Schnitt
Blatt 1



Pentagramm: Die Abbildung zeigt ein regelmäßiges Fünfeck mit seinen Diagonalen. Läßt man die Seiten weg, entsteht ein Sternenfünfeck (Pentagramm). Das Pentagramm war für die Pythagoreer (Schüler des Pythagoras (ca. 300 v.C.)) ein Symbol für die Gesundheit und ihr Erkennungszeichen. Im Mittelalter behielt das Pentagramm seine symbolische Kraft und wurde als Drudenfuß zum Schutz vor Hexen und bösen Geistern benutzt.

Zaubertrick:

Man nehme einen langen Streifen Papier

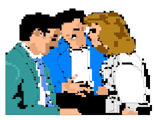
mache einen einfachen Knoten

ziehe ihn fest

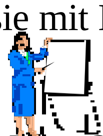
und drücke ihn platt.

Hinweise zur Station:

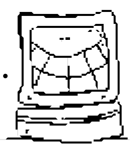
- Eine der Anwendungsaufgaben muss gelöst werden.
- Die Station kann auch in Dreiergruppen bearbeitet werden.



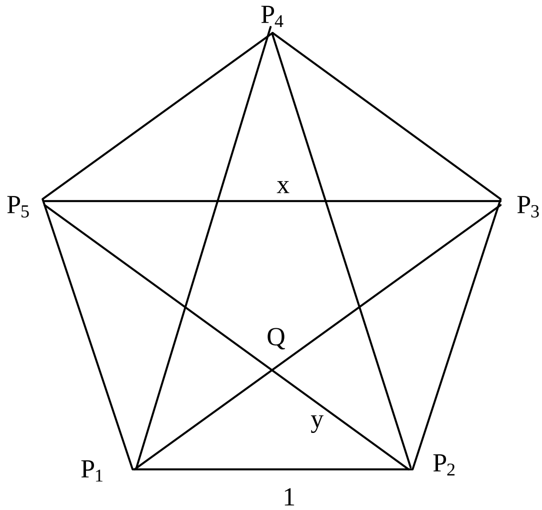
- Wenn du die Aufgabe von Blatt 2 gut löst und erläuterst, kannst du sie mit Hilfe einer Folie präsentieren und damit eine sehr gute Note erhalten.



- Hinweise zur Lösung der Aufgabe findest du auch im Internet (siehe Blatt 2).



Station L
Der goldene Schnitt
Blatt 2



Die Seitenlänge des Fünfecks sei 1.

Berechne die Länge der Diagonalen.

Ein Teil der Lösung ist hier angegeben:

Die Abbildung zeigt ein regelmäßiges Fünfeck mit Seitenlänge 1.
Die Länge der Diagonalen ist mit x bezeichnet.
Die Streckenlänge $\overline{QP_5}$ ist ebenfalls 1.
Dann gilt für $\overline{QP_2}$ = y = x-1.

Ich wende nun den zweiten Strahlensatz an auf das Trapez $P_1P_2P_3P_5$:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}.$$

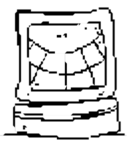
Dies liefert mir die quadratische Gleichung $\boxed{x^2 - x = 1}$.

Löse die Gleichung und berechne damit die Länge der Diagonale x.

Berechne danach noch die Seite y.

Berechne zuletzt den Kehrwert der Diagonalenlänge.

Schlag nach im Internet: http://btcpxx.che.uni-bayreuth.de/rho/Knowhow/goldenerschnitt.html



Station M
al-Hwarizmi

Von dem arabischen Mathematiker Al-Hwarizmi (gestorben etwa 850) sind zwei mathematische Werke bekannt.

Er beschäftigte sich vor allem mit Erbteilungsaufgaben, die nach den Vorschriften des Korans gelöst werden mussten.
Hieraus eine Aufgabe mit Lösung:

- Aufgabe:
  Ein Vermögen und 15 Dinare ergeben acht Wurzeln. Wie groß ist das Vermögen?

- Lösung:
  Multipliziere die Hälfte der Wurzeln mit sich, es werden 16.
  Von diesen ziehe die 15 Dinare ab, es bleibt 1.
  Die Wurzel daraus, nämlich 1, ziehe von der Hälfte der Wurzeln ab, es bleibt 3.
  Oder addiere die Wurzel zu der Hälfte der Wurzeln; das ergibt 5.
  Es ist klar, dass beide Werte richtig sind.

- Erklärung:
- Wurzel: Das Unbekannte.
- Vermögen: Das Quadrat der Wurzel.

Aufgabe:
Übersetze jeden Satz mit der Sprache der Algebra.

Hinweise zur Station:

- Die Station wird am besten in Einzelarbeit oder in Partnerarbeit gelöst.

- Man kann ausgehend von den Lösungen die Gleichung aufschreiben.

Station N
Anhaltewege

Der Anhalteweg eines Autos kann als Summe von Reaktionsweg und Bremsweg angesehen werden. A=R+B
Der Reaktionsweg R ist proportional zur Geschwindigkeit.
Der Bremsweg B ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit.

Geht man von einer Reaktionszeit von einer Sekunde aus, so gilt für den Reaktionsweg R:

$$R = \frac{1}{3,6} \cdot x$$

Der Bremsweg hängt natürlich von der Reibung ab, die durch Reifen, Bodenbeschaffenheit und Masse des Autos bestimmt ist. Als Faustformel gilt

$$B = \frac{1}{100} \cdot x^2.$$

Bezeichnet A=y den Anhalteweg in Metern und x die Geschwindigkeit in km/h, so gilt deshalb

$$y = R + B = ax^2 + bx = \frac{1}{100}x^2 + \frac{1}{3,6}x.$$

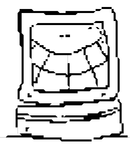
- **Aufgabe 1:**
  Ich fahre mit 50 km/h. Wie lang ist mein Anhalteweg?

- **Aufgabe 2:**
  Ich bremse wegen eines plötzlich auftauchenden Hindernisses im Abstand von 50m. Bei welcher Geschwindigkeit komme ich genau am Hindernis zum Stand?

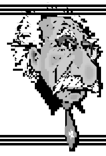
- **Aufgabe 3:**
  Ich fahre mit 120 km/h 100m hinter einem PKW her, der 100 km/h schnell ist, als dieser plötzlich bremst. Nach einer „Schrecksekunde“ bremse ich ebenfalls.

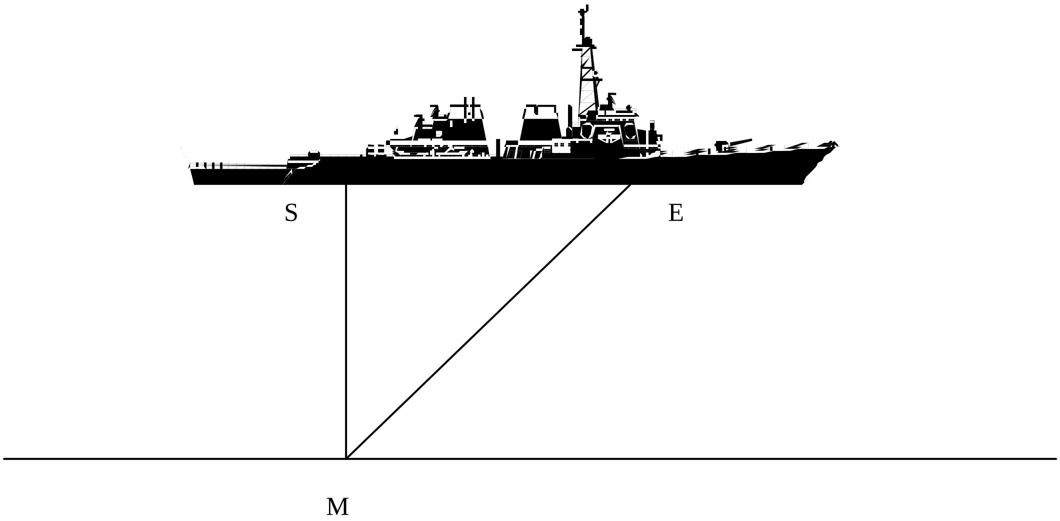
Hinweise zur Station:

- Die Station wird am besten in Einzelarbeit oder in Partnerarbeit gelöst.
- Die dritte Aufgabe ist freiwillig.
- Löse die zweite Aufgabe zeichnerisch (DERIVE) und rechnerisch.

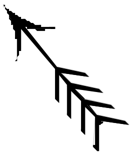


Station O
Echolot

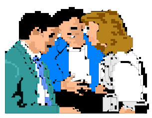




Ein Schiff bestimmt die Wassertiefe mittels Echolot. Dieses sendet senkrecht nach unten ein Schallsignal aus, dessen Echo im Empfänger nachgewiesen wird.
Der Empfänger E befinde sich 10m vom Sender S entfernt wie dieser am Schiffsboden.
Die Schallgeschwindigkeit im Wasser beträgt ca. 1500 m/s.
Die Zeit zwischen dem Absenden und dem Empfangen des Signals ist 0,1s.
Bestimme aus diesen Angaben den Abstand des Schiffsbodens vom Meeresgrund M.

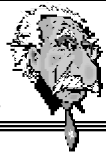


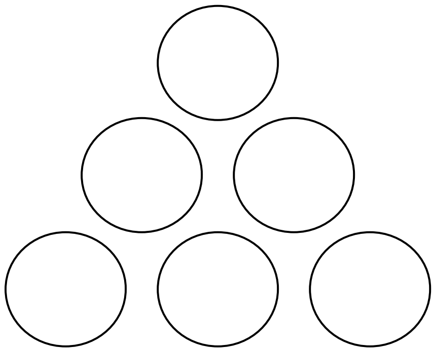
Hinweise zur Station:



- Die Station kann auch in Dreiergruppen gelöst werden.
- Lösungshinweise können dem Lösungsblatt entnommen werden.
- Beachte die Hinweise zur Lösung von Textaufgaben im Schulbuch.

Station P
Dreieckszahlen



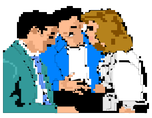


Mit Tennisbällen kann man Dreiecke wie in der Figur legen.
Legt man 2 Bälle auf eine Seite, hat das Dreieck insgesamt 3 Kugeln.
Legt man 3 Bälle auf eine Seite, hat das Dreieck 6 Kugeln (Abbildung). Bei vier Bällen auf einer Seite sind es 10, bei einem Ball auf einer Seite 1 Kugel.

a) Wie viele Bälle hat das Dreieck, wenn 5 (6, n) Bälle auf einer Seite liegen?
b) Umkehrung der Fragestellung: Ein solches Dreieck hat 3828 Bälle. Wie viele Bälle hat es auf einer Seite?

Hinweise zur Station:

- Die Station kann auch in Dreiergruppen gelöst werden.

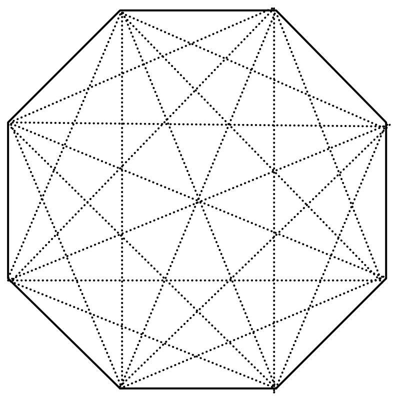


- Lösungshinweise können dem Lösungsblatt entnommen werden.
- Beachte die Hinweise zur Lösung von Textaufgaben im Schulbuch.

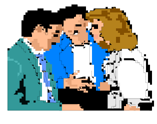
Station Q
Vielecke

In dieser Aufgabe geht es um eine Beziehung zwischen der Anzahl der Ecken und der Anzahl der Seiten von konvexen Vielecken (konvex bewirkt, dass keine Ecke innen liegt).

a) Stelle eine Wertetabelle auf für die Zuordnung
   Anzahl Ecken $\rightarrow$ Anzahl Diagonalen .
b) Bestimme eine quadratische Funktion aus den Wertepaaren für das 4-, 5- und 6-Eck.
c) Faktorisiere die quadratische Funktion.
d) Gib eine anschauliche Begründung des Ergebnisses $n \rightarrow \frac{n \cdot (n-3)}{2}$.
e) Wie viele Ecken hat ein Vieleck mit 119 Diagonalen?
f) Gibt es ein Vieleck, das 3 (4; 1032) Diagonalen mehr hat als Seiten?



Hinweise zur Station:



- Die Station kann auch in Dreiergruppen gelöst werden.
- Lösungshinweise können dem Lösungsblatt entnommen werden.
- Beachte die Hinweise zur Lösung von Textaufgaben im Schulbuch.

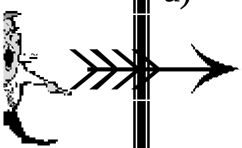
Station A
Blatt 2
Kugelstoßen

Lösungsblatt

Die folgende Tabelle zeigt einige ausgewertete Stöße von der Olympiade 1972 in München, die damals mit Hilfe einer Videokamera ausgewertet wurden:

Name	Nation	Abstoß-geschwin-digkeit v (in m/s)	Abstoß-höhe h (in m)	Abstoß-winkel α (in $^\circ$)	gemessene Stoßweite w (in m)	theore-tische Stoß-weite (in m)	Fehler (in %)
Woods	USA	13,9	2,15	40,0	21,17	21,27	0,5
Feuerbach	USA	13,5	2,05	38,3	21,01	20,09	4,4
Brieseneck	DDR	13,4	2,22	39,0	20,61	19,95	3,0
Simola	FIN	13,3	2,04	34,3	18,91	19,53	3,3

Du sollst nun die folgenden **Fragen** mit Hilfe von DERIVE **beantworten**:



a) Sind die gemessenen Stoßweiten in Übereinstimmung mit der Formel? Gib Gründe dafür an, wieso gemessener und theoretischer Wert nicht übereinstimmen. Wie groß ist der Fehler (in %)? Fülle die beiden letzten Spalten der Tabelle aus.

b) Wie hoch war die Kugel von Woods im höchsten Punkt der Flugkurve? fast 7 Meter

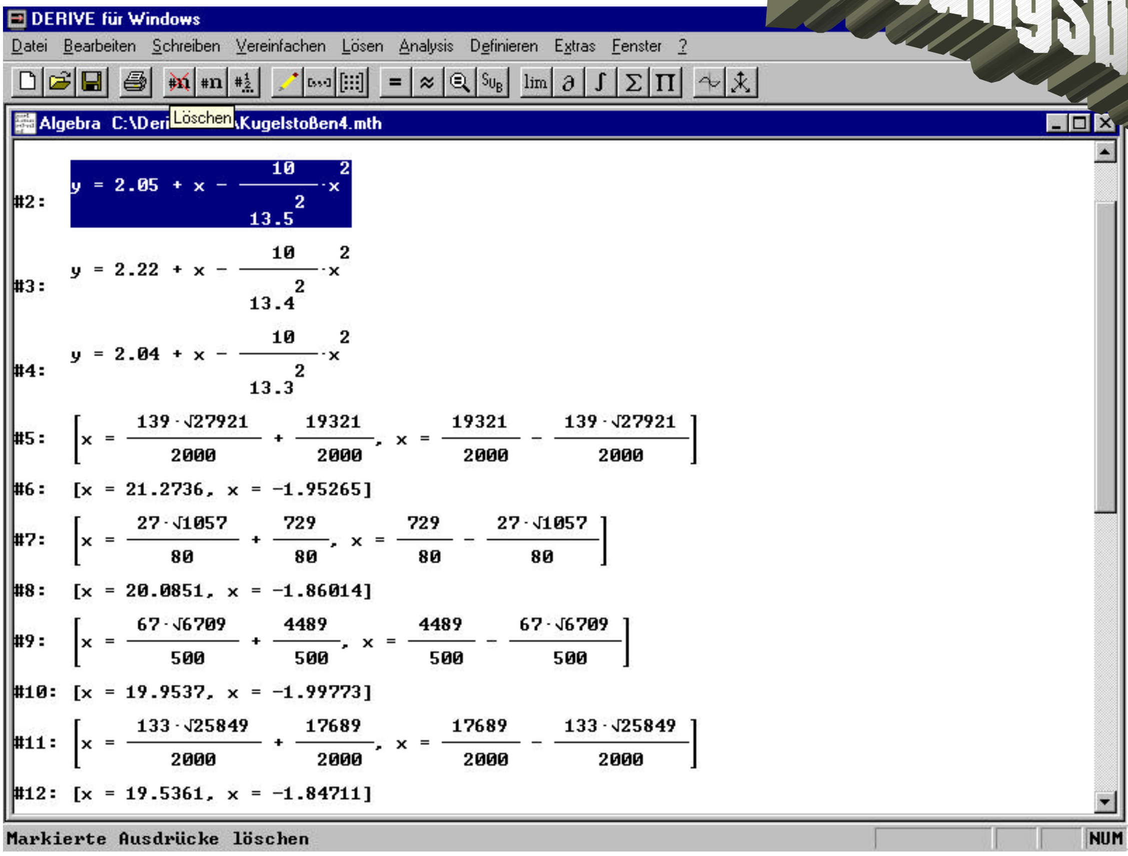
c) Wie weit hätte Simola gestoßen, wenn er 10% größer wäre? 19,70m

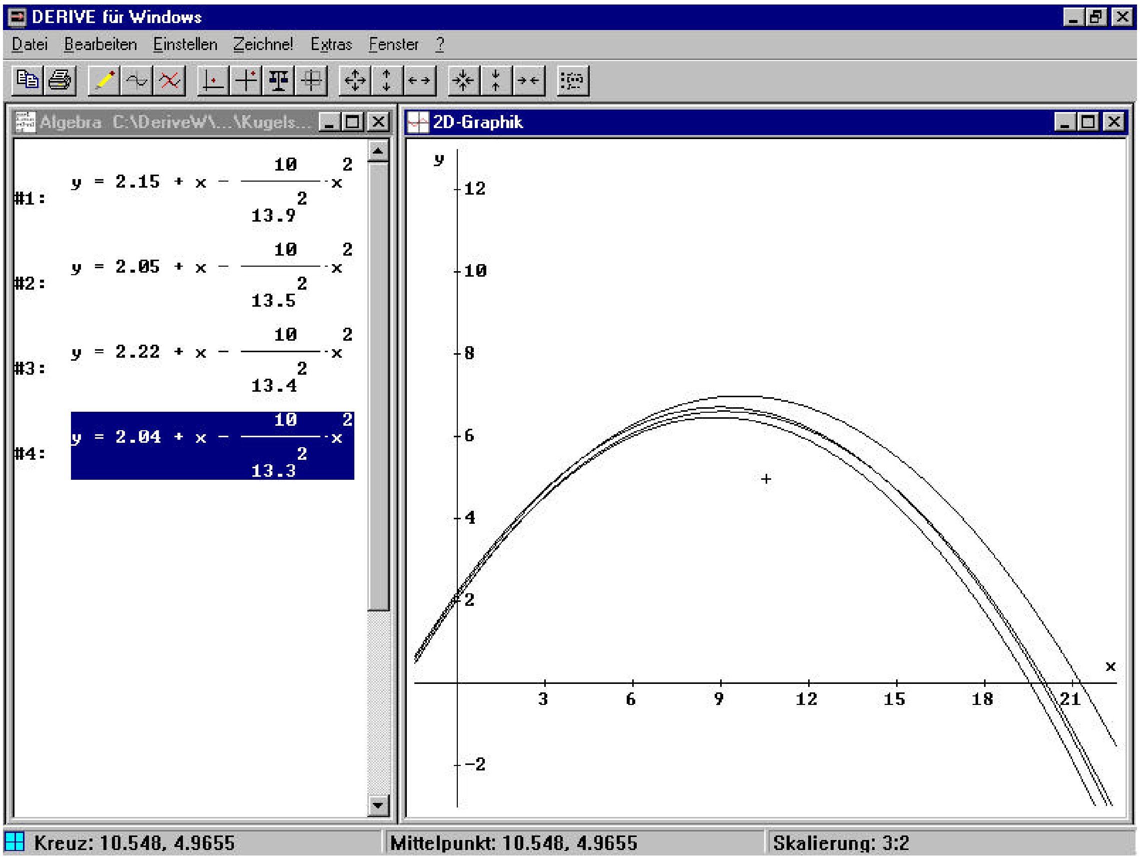
d) Wie weit hätte Simola gestoßen, wenn er seine Abstoßgeschwindigkeit um 10% verbessert hätte? 23,28m

e) Stelle selbst eine sinnvolle Frage und versuche sie zu beantworten.

Lösungsnachweis auf den Dateien KugelstoßenLösa.mth bis KugelstoßenLösd.mth.

DERIVE-Lösungen zur Kugelstoßaufgabe





Station B
Kugelstoßen
Internetrecherche

Lösungsblatt

Lösung zur Kugelstoßaufgabe (Internetrecherche):
Ergänzende Informationen aus dem Internet (Homepage des DLV (Deutschen Leichtathletik Verband)) zur Kugelstoßaufgabe:

http://www.dlv-sport.de/inhalt4/inhalt4.htm

Deutsche Bestenliste 1999

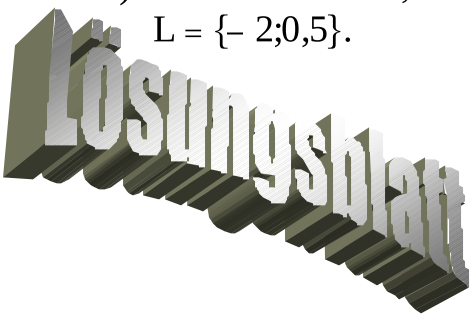
21,42 Oliver-Sven Buder	(TV Wattenscheid)	21.08.	Sevilla
20,00 Michael Mertens	(LG Göttingen)	02.06.	Chemnitz
20,00 Gunnar Pfingsten	(MTG Mannheim)	03.07.	Erfurt
19,58 Andy Dittmar	(LG Ohra/Hörsel)		
19,45 Oliver Dück	(LAC Quelle Fürth/München)	06.06.	Gotha
19,17 Andreas Deuschle	(Sala. Kornwestheim)	28.07.	Neckarhausen
19,06 René Sack	(LAZ Leipzig)	03.07.	Erfurt
19,02 Marc Roos	(LG Rhein-Wied)	06.06.	Gotha
18,95 Ralf Bartels	(SC Neubrandenburg)	19.06.	Mannheim
18,88 Ralf Kahles	(MTG Mannheim)		

Entwicklung des Weltrekords im Kugelstoßen

Kugelstoß (7,26 kg)

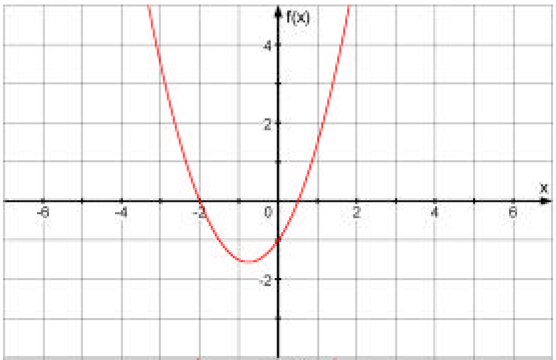
15,54	Ralph Rose (USA)	21.08.1909
16,04	Emil Hirschfeld (GER)	26.08.1928
16,20	Frantisek Douda (TCH)	24.09.1932
17,40	Jack Torrance (USA)	05.08.1934
17,68	Charles Fonville (USA)	17.04.1948
17,95	Jim Fuchs (USA)	22.08.1950
18,00	Parry O'Brien (USA)	09.05.1953
18,62	Parry O'Brien (USA)	05.05.1956
19,06	Parry O'Brien (USA)	03.09.1956
19,30	Parry O'Brien (USA)	01.08.1959
19,67	Dallas Long (USA)	26.03.1960
20,06	Bill Nieder (USA)	12.08.1960
20,68	Dallas Long (USA)	25.07.1964
21,52	Randy Matson (USA)	08.05.1965
21,82	Al Feuerbach (USA)	05.05.1973
22,00	Alexander Baryschnikow	10.07.1976
22,64	Udo Beyer (GDR)	20.08.1986
22,91	Alessandro Andrei (ITA)	12.08.1987
23,06	Ulf Timmermann (GDR)	22.05.1988
23,12	Randy Barnes (USA)	20.05.1990

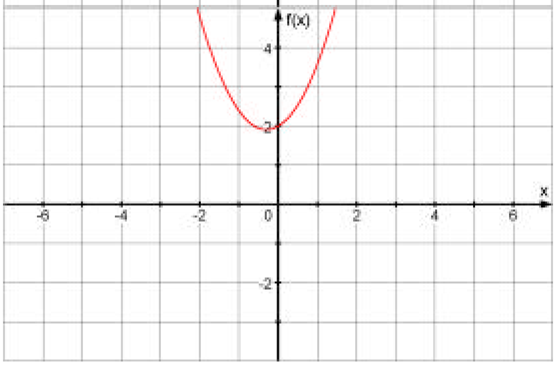
Station C
Zeichnerische Lösung
Blatt 3



1) Aufgabe:

a) $2x^2 + 3x - 2 = 0$,
$L = \{-2; 0{,}5\}$.

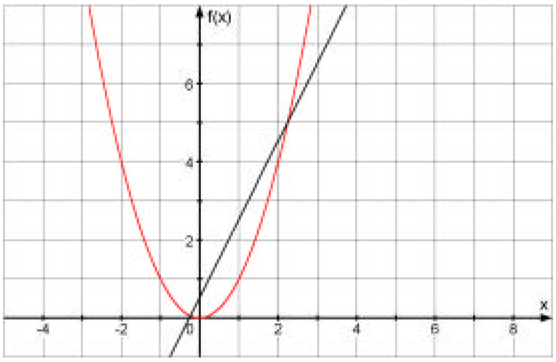




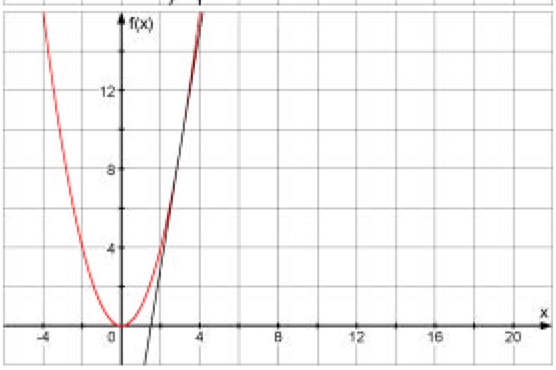
b) $0{,}5x^2 + 0{,}3x + 1 = 0$,
$L = \{\ \}$.

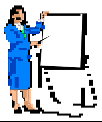
2)

a) $1{,}5x^2 - 3x - 0{,}8 = 0$,
$x^2 = 2x - \frac{8}{15}$,
$L \approx \{2{,}2; -0{,}2\}$.



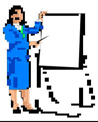
b) $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{9}{2} = 0$,
$x^2 - 6x + 9 = 0$,
$x^2 = 6x - 9$,
$L = \{3\}$.



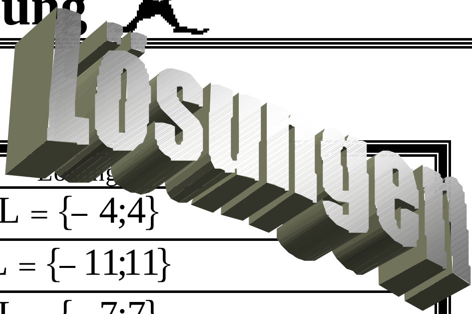


Station E
Rechnerische Lösung

Aufgabe	Tipp
$-3x^2 + 48 = 0$	Addiere zunächst $3x^2$.
$-4z^2 = -484$	Dividiere zunächst durch -4.
$x^2 - 47 = 2$	Addiere zunächst 47.
$(y-7)\cdot(y+7) = 0$	Man kann entweder ausmultiplizieren oder die Lösungen sofort mit Hilfe einer Fallunterscheidung ablesen.
$y^2 - 8y + 20 = 4$	Subtrahiere zunächst 4 und verfahre dann wie in Station D.
$2z^2 - 11z - 6 = 0$	Teile zunächst durch 2.
$x^2 + 6x + 5 = 0$	Verfahre wie in Station D.
$x^2 + 8x - 9 = 0$	Verfahre wie in Station D.
$x^2 = 4x - 3$	Subtrahiere 4x-3 und verfahre dann wie in Station D.
$\frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{5} = 0$	Multipliziere zunächst mit 5 und verfahre dann wie in Station D. Rechne mit Brüchen.
$0{,}2y^2 - 0{,}1y + 0{,}012 = 0$	Multipliziere zunächst mit 5 und verfahre dann wie in Station D. Rechne mit Dezimalbrüchen.
$u^2 - 9 + (2u+1)^2 = 25$	Vereinfache, bringe alles auf die linke Seite und teile dann die Gleichung durch den Vorfaktor von u^2.

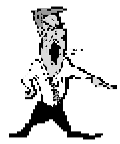


Station E
Rechnerische Lösung



Aufgabe	Lösung
$-3x^2 + 48 = 0$	$L = \{-4;4\}$
$-4z^2 = -484$	$L = \{-11;11\}$
$x^2 - 47 = 2$	$L = \{-7;7\}$
$(y-7)\cdot(y+7) = 0$	$L = \{-7;7\}$
$y^2 - 8y + 20 = 4$	$L = \{4\}$
$2z^2 - 11z - 6 = 0$	$L = \left\{-\frac{1}{2};6\right\}$
$x^2 + 6x + 5 = 0$	$L = \{-1;5\}$
$x^2 + 8x - 9 = 0$	$L = \{-9;1\}$
$x^2 = 4x - 3$	$L = \{1;3\}$
$\frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{5} = 0$	$L = \{\ \}$
$0{,}2y^2 - 0{,}1y + 0{,}012 = 0$	$L = \{0{,}2;0{,}3\}$
$u^2 - 9 + (2u+1)^2 = 25$	$L = \{-2{,}2;3\}$

Station F
Rechnerische Lösung
Lösungsformel



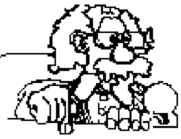
Lösungsformel:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2y}}$$

Ergebnisse der Aufgaben:

1) $L = \{-3{,}5;6\}$
2) $L = \{-7;8\}$
3) $L = \left\{\frac{5}{3};2\right\}$
4) $L = \left\{-0{,}2;\frac{1}{6}\right\}$
5) $L = \{\ \}$
6) $L = \{-0{,}9;0{,}1\}$
7) $L = \{-2{,}5;5\}$

Station G
Vieta’s Trick
Blatt 2
Lösungen



Prof. Nosenix' Trickkiste 105

Historische Verfahren - zeitgemäß aufbereitet

Wie Vieta quadratische Gleichungen löste

Lösungen

$x^2 + 7x + 12 = 0$	$(x + 3) \cdot (x + 4) = 0$	$x_1 = -3$	$x_2 = -4$
$x^2 - 5x - 24 = 0$	$(x + 3) \cdot (x - 8) = 0$	$x_1 = -3$	$x_2 = 8$
$x^2 - 2x - 35 = 0$	$(x + 5) \cdot (x - 7) = 0$	$x_1 = -5$	$x_2 = 7$
$x^2 - 7x + 10 = 0$	$(x - 2) \cdot (x - 5) = 0$	$x_1 = 2$	$x_2 = 5$
$x^2 - 21x + 20 = 0$	$(x - 1) \cdot (x - 20) = 0$	$x_1 = 1$	$x_2 = 20$
$x^2 + 2x - 80 = 0$	$(x - 8) \cdot (x + 10) = 0$	$x_1 = 8$	$x_2 = -10$
$x^2 + 4x + 3 = 0$	$(x + 1) \cdot (x + 3) = 0$	$x_1 = -1$	$x_2 = -3$
$x^2 - 22x + 72 = 0$	$(x - 4) \cdot (x - 18) = 0$	$x_1 = 4$	$x_2 = 18$
$x^2 - 6x - 27 = 0$	$(x + 3) \cdot (x - 9) = 0$	$x_1 = -3$	$x_2 = 9$
$x^2 + 11x + 30 = 0$	$(x + 5) \cdot (x + 6) = 0$	$x_1 = -5$	$x_2 = -6$
$x^2 - x - 12 = 0$	$(x + 3) \cdot (x - 4) = 0$	$x_1 = -3$	$x_2 = 4$

Station H
Vieta's Trick
Beweis

Lösung

Gegeben:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}$$

Beweis:

$$x_1 + x_2$$

$$= \frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}$$

$$= \frac{-b+\sqrt{b^2-4c}-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}$$

$$= \frac{-2b}{2}$$

$$= -b$$

$$x_1 \cdot x_2$$

$$= \frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}$$

$$= \frac{(-b+\sqrt{b^2-4c})\cdot(-b-\sqrt{b^2-4c})}{4}$$

$$= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4}$$

$$= \frac{4ac}{4}$$

$$= c$$

Station I
Satz von Vieta:
Übungen

Lösungen

a i $x^2 - 7x + 10 = 0$

a ii $x^2 - 6x + 4 = 0$

b i Echte Lösungsmenge: $L = \{-4; -3\}$

b ii Lösungsmenge stimmt

c i $(x-3)(x+5)$

c ii $(x-7)(x+2)$

d i $N_1(5/0); N_2(-2/0)$

d ii $N_1(2/0); N_2(-9/0)$

e

i) $(x-2)(x-4)$

ii) $(x-3)(x+5)$

iii) Nicht möglich

iv) $x^2 + 6x + 7\ (x+3+\sqrt{2})(x+3-\sqrt{2})$

v) Nicht möglich

vi) $(x+2)(x-\frac{7}{2})$

Station J
Gleichungen für Fortgeschrittene

Lösungen

Aufgabe 1:

$$\frac{3x^2+25}{x^2-25}+\frac{5-x}{5+x}=\frac{2x}{x-5}$$

$$\frac{3x^2+25}{(x+5)(x-5)}+\frac{(5-x)(x-5)}{(5+x)(x-5)}=\frac{2x(x+5)}{(x-5)(x+5)}$$

$$3x^2+25+(5-x)(x-5)=2x(x+5)$$

$$3x^2+25-x^2+10x-25=2x^2+10x$$

$$0=0$$

$$L=\{-5;5\}$$

Aufgabe 2:

Definition smenge :

$$13-4x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq\frac{13}{4}\Rightarrow D=\left\{x\in R/x\leq\frac{13}{4}\right\}$$

Lösung :

$$\sqrt{13-4x}=2-x$$

$$13-4x=4-4x+x^2$$

$$x^2=9$$

$$x=3 \text{ oder } x=-3$$

Probe:

$$x=3:\sqrt{13-12}=2-3 \text{ falsch}$$

$$x=-3:\sqrt{13+12}=2+3 \text{ wahr}$$

$$L=\{-3\}$$

Aufgabe 3:

$x^4 - 29x^2 + 100 = 0$

Substitution :

$y = x^2$

$y^2 - 29y + 100 = 0$

Satz von Vieta :

$y = 25$ oder $y = 4$

Rücksubstitution :

$x^2 = 25$ oder $x^2 = 4$

$x = 5$ oder $x = -5$ oder $x = 2$ oder $x = -2$

$L = \{-5;5;-2;2\}$

Aufgabe 4:

$x^2 + 2bx - 3b^2 = 0$

Lösungsfomel :

$$x_{1,2} = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 + 4 \cdot 3b^2}}{2} = \frac{-2b \pm \sqrt{16b^2}}{2}$$

Fallunters cheidung :

Fall1 : $b = 0$: $L = \{0\}$

Fall2 : $b > 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-2b \pm \sqrt{16b^2}}{2} = \frac{-2b \pm 4b}{2} = b \text{ oder } -3b$$

$L = \{b;3b\}$

Fall3 : $b < 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-2b \pm \sqrt{16b^2}}{2} = \frac{-2b \mp 4b}{2} = b \text{ oder } -3b$$

$L = \{b;3b\}$

Aufgabe 5:

$$\begin{cases} 2y - x^2 = 0 \\ x - y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - x^2 = 0 \\ x + 4 = y \end{cases} \Leftrightarrow 2x + 8 - x^2 = 0$$

Also : $x^2 - 2x - 8 = 0$

Satz von Vieta : $x = -2$ oder $x = 4$

$L = \{(-2;2);(4;8)\}$

Station K
Die Brunnenaufgabe

Lösung

Zeit hin: x

Zeit zurück: 3-x

Strecke hin: $5x^2$

Strecke zurück: $340 \cdot (3 - x)$

Strecke hin = Strecke zurück also: $5x^2 = 340 \cdot (3 - x)$

Diese quadratische Gleichung wird gelöst:

$$5x^2 = 1020 - 340x \Leftrightarrow 5x^2 + 340x - 1020 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-340 \pm \sqrt{340^2 + 4 \cdot 5 \cdot 1020}}{2 \cdot 5} \Rightarrow$$

$$x = \frac{-340 + 368{,}78}{10} = 2{,}878$$

Zeit zurück: 0,122

Brunnentiefe 41m.

Am 15. Februar 1564 wurde Galileo Gallilei in Pisa geboren.

Der Prozess kam zustande als Galilei behauptete, dass sich die Sonne im Mittelpunkt des Planetensystems befindet, dass die Erde sie umkreist und dass sie sich um ihre Achse dreht und damit den Wechsel von Tag und Nacht hervorruft. Der Prozess fand in den Jahren 1632-1633 statt.

Lösung

Station L
Der goldene Schnitt

Zaubertrick:
Man nehme einen langen Streifen Papier
mache einen einfachen Knoten
ziehe ihn fest
und drücke ihn platt.

Eine praktische Lösung zu diesem Trick kann ausgelegt werden.

.

Die quadratische Gleichung $\boxed{x^2 - x = 1}$.

wird wie folgt gelöst:

$$x^2 - x = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| = \sqrt{\frac{5}{4}} \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{5}{4}} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} \Rightarrow x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} =$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Es gilt für y:

$$y = x - 1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1 =$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

und für den Kehrwert der Diagonalenlänge:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = y$$

Also $xy = 1$

Station M
al-Hwarizmi

Lösung

- Aufgabe:
  Ein Vermögen und 15 Dinare ergeben acht Wurzeln. Wie groß ist das Vermögen?

$x^2 + 15 = 8x$. Gesucht x^2

- Lösung:
  Multipliziere die Hälfte der Wurzeln mit sich, es werden 16.
  $\frac{8}{2} \cdot \frac{8}{2} = 16$
  Von diesen ziehe die 15 Dinare ab, es bleibt 1.
  16-15=1
  Die Wurzel daraus, nämlich 1, ziehe von der Hälfte der Wurzeln ab, es bleibt 3.
  $\frac{8}{2} - 1 = 3$
  Oder addiere die Wurzel zu der Hälfte der Wurzeln; das ergibt 5.
  $\frac{8}{2} + 1 = 5$
  Es ist klar, dass beide Werte richtig sind.

Station N
Anhalteweg

Lösung

1) $x = 50 \Rightarrow y = \frac{1}{100} \cdot 2500 + \frac{1}{3,6} \cdot 50 = 25 + 13,9 = 38,9$

2) $y = 50 \Rightarrow 50 = \frac{1}{100} \cdot x^2 + \frac{1}{3,6} \cdot x \Leftrightarrow x^2 + \frac{100}{3,6}x - 5000 = 0$

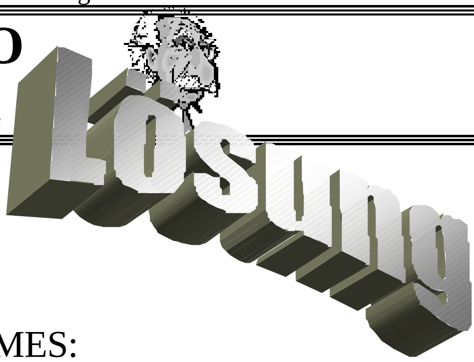
Diese quadratische Gleichung löst man auf herkömmliche Art und erhält als positives x =59,17.

3) Bremsweg des vorausfahrenden von Zeitpunkt 0 an:

$B = \frac{1}{100} \cdot 100^2 = 100$. Mein Anhalteweg:

$x = 120 \Rightarrow y = \frac{1}{100} \cdot 14400 + \frac{1}{3,6} \cdot 120 = 144 + 33,33 = 177,33$. Da die Differenz kleiner als 100 ist, kommt es nicht zum Unfall.

Station O
Echolot



Abstand zum Meeresboden:

$\overline{SM} = x$

Satz von Pythagoras, angewendet auf das Dreieck MES:

$\overline{ME} = y$

I $\quad y^2 = x^2 + 10^2$

In 0,1x legt der Schall 150m zurück.

Also

II $\quad$ x+y=150

Also

II‘ $\quad$ y=150-x

Eingesetzt in I:

$(150 - x)^2 = x^2 + 10^2$

$22500 - 300x + x^2 = x^2 + 100$

$22400 = 300x$

$74\frac{2}{3} = x$

Der Meeresboden ist ungefähr 75m entfernt.

Station P
Dreieckszahlen

a)

Bei fünf Bällen auf einer Seite: 1+2+3+4+5=15 Kugeln.
Bei sechs Bällen auf einer Seite: 1+2+3+4+5+6=21 Kugeln.

Bei n Bällen auf einer Seite: $1+2+3+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ Kugeln.

b)

Ansatz: $\frac{n\cdot(n+1)}{2}=3828$

Lösung:

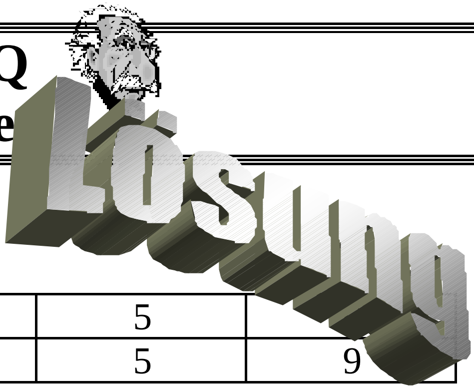
$$\frac{n\cdot(n+1)}{2}=3828 \Leftrightarrow n\cdot(n+1)=7656 \Leftrightarrow n^2+n=7656 \Leftrightarrow$$

$$n^2+n+\frac{1}{4}=7656+\frac{1}{4} \Leftrightarrow (n+\frac{1}{2})^2=\frac{30625}{4} \Leftrightarrow$$

$n+\frac{1}{2}=\frac{175}{2}$ oder $n+\frac{1}{2}=-\frac{175}{2}$

Da n eine natürliche Zahl sein muss, folgt $n+\frac{1}{2}=\frac{175}{2}$ und somit n=87.

Station Q
Vielecke



a)

Anzahl Ecken	3	4	5	[illegible]
Anzahl Diagonalen	0	2	5	9

b)

Mit x für die Anzahl der Ecken und y für die Zahl der Diagonalen und Unbekannten a, b, c gilt:

$ax^2+bx+c=y$

Die Werte aus der Tabelle eingesetzt liefert das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 16a + 4b + c &= 2 \\ 25a + 5b + c &= 5 . \\ 36a + 6b + c &= 9 \end{aligned}$$

Indem man die erste von der zweiten und sodann die erste von der dritten Gleichung subtrahiert, erhält man das neue Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 9a + b &= 3 \\ 20a + 2b &= 7 \end{aligned} .$$

Nun subtrahiert man das doppelte der ersten Gleichung von der zweiten und erhält:

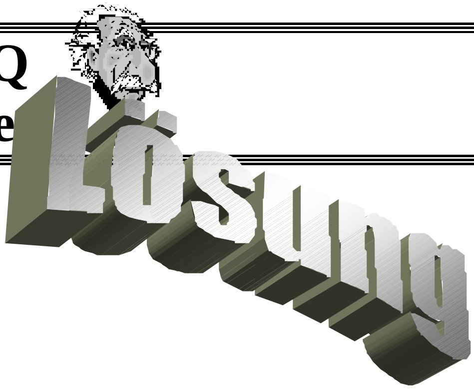
$$2a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} .$$

Dieses erste Ergebnis setzt man in die anderen Gleichungen ein und erhält:

$$\frac{9}{2} + b = 3 \Leftrightarrow b = -\frac{3}{2} \text{ sowie } c = 5 - 25a - 5b = 5 - \frac{25}{2} + \frac{15}{2} = 0 .$$

Insgesamt $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$

Station Q
Vielecke



c)

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x = \frac{x\cdot(x-3)}{2}$$

d)

Jede der n Ecken wird mit den für eine Diagonalenbildung n-3 möglichen anderen Ecken verbunden. Dies sind $n\cdot(n-3)$ Verbindungen.
Da bei dieser Art zu zählen jede Verbindung doppelt gezählt wurde, muss noch durch 2 geteilt werden.

e)

Ansatz: $\frac{x\cdot(x-3)}{2} = 119$

Lösung: $\frac{x\cdot(x-3)}{2} = 119 \Leftrightarrow x\cdot(x-3) = 238 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 238 \Leftrightarrow$

$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 238 + \frac{9}{4} \Leftrightarrow (x - \frac{3}{2})^2 = \frac{961}{4}$

Also $x - \frac{3}{2} = \frac{19}{2}$ oder $x - \frac{3}{2} = -\frac{19}{2}$

Da x positiv sein muss, folgt x=11.

f)

Ansatz: $\frac{x\cdot(x-3)}{2} = x + 3$.

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung liefert x=6

Ansatz: $\frac{x\cdot(x-3)}{2} = x + 4$.

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung liefert kein natürliches x.

Ansatz: $\frac{x\cdot(x-3)}{2} = x + 1032$.

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung liefert x=48.